http://www.onlinebu.com

Roll No

Total No. of Questions : 11] [Total No. of Printed Pages : 20

RJ-422

M.A./M.Sc. 1st Semester (REG./PVT./ATKT) Examination–2018

MATHEMATICS

Paper–II

Real Analysis

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 85/100

http://www.onlinebu.com

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : All questions are compulsory.

खण्ड–अ

Section–A

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

Objective Type Questions

नोट : वस्तुनिष्ठ प्रकार के 10 प्रश्न (1.5 अंक प्रत्येक)।

10×1.5=15

Note : *Objective type 10 questions of 1.5 marks each.*

10×1.5=15

1. सही उत्तर का चयन कीजिए -

Choose the correct answer -

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

(i) P* सामान्य परिशोधन है यदि P* बराबर है -

(अ) $P_1 \cap P_2$ के (ब) $P_1 \doteq P_2$ के

(स) $P_1 \cup P_2$ के (द) $P_1 \cup P_2 \cup P^*$ के

जहाँ P_1 तथा P_2 ; P के दो विभाजन हैं।

P* is the common refinement if P* is equal to -

(a) $P_1 \cap P_2$ (b) $P_1 = P_2$

(c) $P_1 \cup P_2$ (d) $P_1 \cup P_2 \cup P^*$

where P_1 and P_2 are two partitions of P.

(ii) यदि [a, b] पर f सतत है तब

(अ) [a, b] पर $f \in R(\alpha)$

(ब) [a, b] पर $f \notin R(\alpha)$

(स) $\int f \, d\alpha \leq 0$

(द) इनमें से कोई नहीं

If f is continuous on [a, b] then

(a) $f \in R(\alpha)$ on [a, b]

(b) $f \notin R(\alpha)$ on [a, b]

(c) $\int f \, d\alpha \leq 0$

(d) None of these

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

(iii) यदि $\wedge(\gamma) < \infty$ तब γ है :

(अ) एक चाप

(ब) $\gamma(a) = \gamma(b)$

(स) एक सरल रेखा

(द) परिशोधनीय

If $\wedge(\gamma) < \infty$ then γ is :

(a) an arc

(b) $\gamma(a) = \gamma(b)$

(c) a straight line

(d) rectifiable

(iv) यदि $f : [a, b]$ को R^k में प्रतिचित्रित करता है, यदि $f \in R(\alpha)$ के लिए $[a, b]$ पर कोई एकरसीय रूप में वर्धमान फलन α हो, तब

(अ) $\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| > \int_a^b |f|\, d\alpha$

(ब) $\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| > \int_a^b f\, |d\alpha|$

(स) $\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| \leq \int_a^b |f|\, d\alpha$

(द) इनमें से कोई नहीं

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

If f maps [a, b] into R^k, if $f \in R(\alpha)$ for some monotonically increasing function α on [a, b] then:

(a) $\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| > \int_a^b |f|\, d\alpha$

(b) $\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| > \int_a^b f\, |d\alpha|$

(c) $\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| \leq \int_a^b |f|\, d\alpha$

(d) None of these

(v) प्रत्येक एकरूप से अभिसारी अनुक्रम आवश्यक रूप से है –

(अ) अपसारी

(ब) दोलनकारी

(स) बिन्दुवार अभिसारी

(द) इनमें से कोई नहीं

Every uniformly convergent sequence is necessarily: http://www.onlinebu.com

(a) divergent

(b) oscillatory

(c) pointwise convergent

(d) none of these

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

(vi) श्रृंखला

$$\frac{\cos x}{1^p}+\frac{\cos 2x}{2^p}+\frac{\cos 3x}{3^p}+..+\frac{\cos nx}{n^p}+..$$

(अ) $p > 1$ के लिए R पर एक रूप से अभिसरित होता है

(ब) $p > 1$ के लिए R पर अपसरित होता है

(स) $p > 1$ के लिए R पर अनंत रूप से दोलन करता है

(द) इनमें से कोई नहीं

Series

$$\frac{\cos x}{1^p}+\frac{\cos 2x}{2^p}+\frac{\cos 3x}{3^p}+..+\frac{\cos nx}{n^p}+..$$

(a) Converges uniformly on R for $p > 1$

(b) Diverges on R for $p > 1$

(c) Oscillates infinitely on R for $p > 1$

(d) None of these

(vii) मान लीजिए X एक सदिश स्थान है तथा $\dim X = n$; X स्पान X में n सदिशों का एक समुच्चय E है यदि तथा केवल यदि E है :

(अ) निर्भर (ब) स्वतंत्र

(स) निरंतर (द) (अ) तथा (स) दोनों

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

Suppose X is a vector space and $\dim X = n$. A set E on n vectors in X spans X if and only if E is :

(a) dependent (b) independent

(c) continuous (d) both (a) and (c)

(viii) $A \in L(R^n, R^m)$ के लिए मानक $\|A\|$ बराबर है :

(अ) $\sup\limits_{x \in R^n, |x| \le 1} |Ax|$ के

(ब) $\operatorname{Inf}\limits_{x \in R^n, |\alpha| \le 1} |Ax|$ के

(स) $\operatorname{sub}\limits_{x \in R^n, |x| > 1} |Ax|$ के

(द) $\operatorname{Inf}\limits_{x \in R^n, |x| > 1} |Ax|$ के

For $A \in L(R^n, R^m)$ then norm $\|A\|$ is equal to

(a) $\sup\limits_{x \in R^n, |x| \le 1} |Ax|$

(b) $\operatorname{Inf}\limits_{x \in R^n, |\alpha| \le 1} |Ax|$

(c) $\operatorname{sub}\limits_{x \in R^n, |x| > 1} |Ax|$

(d) $\operatorname{Inf}\limits_{x \in R^n, |x| > 1} |Ax|$

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

(ix) घात शृंखला $\sum C_n Z^n$ की अभिसारिता की त्रिज्या R जहाँ $C_n = n^n$ है :

(अ) ∞ (ब) $\frac{1}{2}$

(स) $\frac{1}{3}$ (द) 0

Radius of convergence R of the powers series $\sum C_n Z^n$ where $C_n = n^n$ is :

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) 0

(x) मान लें $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ तथा A_x निवेशयोग्य हो। तब वहाँ प्रत्येक $k \in R^m$ के संगत एक अद्वितीय $h \in R^n$ इस प्रकार से है कि $A(h, k) = 0$ तथा k से h की गणना की जा सकती है सूत्र : http://www.onlinebu.com

(अ) $h = -(A_x) A_y$ द्वारा

(ब) $h = (-A_x)^{-1} A_y h$ द्वारा

(स) $h = -(A_x)^{-1} A_y k$ द्वारा

(द) $h = -(A_x)^{-1} A_x$ द्वारा

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

Let $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ and A_x be investible. Then there corresponds to every $k \in R^m$ a unique $h \in R^n$ such that $A(h, k) = 0$ and h can be computed by from k by the formula :

(a) $h = -(A_x) A_y$

(b) $h = (-A_x)^{-1} A_y h$

(c) $h = -(A_x)^{-1} A_y k$

(d) $h = -(A_x)^{-1} A_x$

खण्ड–ब

Section–B

लघु उत्तरीय प्रश्न

Short Answer Type Questions

नोट : लघूत्तरीय प्रकार के 5 प्रश्न (5 अंक प्रत्येक) आंतरिक विकल्प सहित। $5 \times 5 = 25$

Note : Short answer type 5 questions of 5 marks each with Internal choice. $5 \times 5 = 25$

2. मान लें f सतत हो तथा α एक [a, b] पर एकरसीय रूप से वर्धमान हो। तब सिद्ध कीजिए कि [a, b] पर $f \in R(\alpha)$.

Let f be continuous and α monotonically increasing on [a, b] then prove that $f \in R(\alpha)$ on [a, b].

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

अथवा/or

मान लें f एक बंधित फलन हो तथा α एक [a, b] पर एकरसीय रूप से वर्धमान फलन हो। तब सिद्ध कीजिए कि

$$\int_{-a}^{b} f\, d\alpha \le \int_{a}^{-b} f\, d\alpha$$

Let f be a bounded function and α a monotonically increasing function on [a, b]. Then prove that

$$\int_{-a}^{b} f\, d\alpha \le \int_{a}^{-b} f\, d\alpha$$

3. परिभाषित कीजिए -

(अ) सदिश-मूल्यित फलनों का समाकलन

(ब) परिशोधनीय वक्र

Define: http://www.onlinebu.com

(a) Integration of vector-valued Functions

(b) Rectifiable curves

अथवा/or

यदि [a, b] को R^k में f तथा F प्रतिचित्रित करते हैं, यदि [a, b] पर $f \in R$ और यदि $F' = f$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

If f and F map [a, b] into R^k, if $f \in R$ on [a, b] and if $F' = f$ then prove that $\int_{a}^{b} f(t)\, dt = F(b) - F(a)$

4. सिद्ध कीजिए कि E पर परिभाषित फलनों का अनुक्रम $\{f_n\}$, E पर एकरूप से अभिसरित होता है यदि तथा केवल यदि प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए एक पूर्णांक N मौजूद है इस प्रकार से कि $m \ge N, n \ge N, x \in E$ का तात्पर्य है

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon$$

Prove that the sequence of functions $\{f_n\}$ defined on E, converges uniformly on E if and only if for every $\epsilon > 0$ there exists an integer N such that $m \ge N, n \ge N, x \in E$ implies

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon$$

अथवा/or

सिद्ध कीजिए कि फलनों की एक शृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$; X पर एकरूप से (तथा पूर्ण रूप से) अभिसरित होगी यदि वहाँ धनात्मक स्थिरांकों की एक अभिसारी शृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ मौजूद है इस प्रकार से कि $|u_n(x)| \le M_n$ सभी n तथा $x \in X$ के लिए

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

Prove that a series of function $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ will converge uniformly (and absolutely) on X if there exists a convergent series $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ of positive constants such that $|u_n(x)| \le M_n$ for all n and $x \in X$

5. यदि $A, B \in L(R^n, R^m)$ तब सिद्ध कीजिए कि -

(अ) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ तथा (ब) A तथा B के बीच दूरी के साथ $\|A-B\|$ के रूप में परिभाषित है। $L(R^n, R^m)$ एक मीट्रिक स्थान है।

If $A, B \in L(R^n, R^m)$ then prove that -

(a) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ and (b) with the distance between A and B defined as $\|A-B\|$. $L(R^n, R^m)$ is a metric space.

अथवा/or

मान लें $f; R^m$ में एक खुले समुच्चय $E \subset R^n$ को प्रतिचित्रित करता है तथा f एक बिन्दु $x \in E$ पर अवकलनीय हो, तब सिद्ध कीजिए कि आंशिक अवकलज $(D_j f_i)(x)$ मौजूद हैं तथा

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

$$f'(x)\, e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)\, u; \quad (1 \le j \le n)$$

यहाँ $\{e_1, \ldots e_n\}$ तथा $\{u_1, \ldots u_m\}$ क्रमशः R^n और R^m के प्रमाप आधार हैं।

Let f maps an open set $E \subset R^n$ into R^m and f be differentiable at a point $x \in E$, then prove that the partial derivatives $(D_j f_i)(x)$ exists and

$$f'(x)\, e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)\, u; \quad (1 \le j \le n)$$

Here $\{e_1, \ldots e_n\}$ and $\{u_1, \ldots u_m\}$ are standard basis of R^n and R^m respectively. http://www.onlinebu.com

6. मान लीजिए f एक खुले समुच्चय $E \subset R^2$ में परिभाषित है तथा $D_1 f$ और $D_{21} f$; E के प्रत्येक बिन्दु पर मौजूद हैं। मान लीजिए $Q \subset E$ निर्देशांक अक्षों के समानान्तर पार्श्वों सहित एक बंद आयत है, जिसके (a, b) तथा $(a+h, b+k)$ के रूप में विपरीत शीर्ष $(h \ne 0, k \ne 0)$ हैं,

$$\Delta(f, Q) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$$

को रखिए। तब सिद्ध कीजिए कि Q के भीतर में एक बिन्दु (x, y) है इस प्रकार से कि $\Delta(f, Q) = h\,k\,(D_{21} f)(x, y)$

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

Suppose f is defined in an open set $E \subset R^2$ and $D_1 f$ and $D_{21} f$ exist at every point of E. Suppose $Q \subset E$ is a closed rectangle with sides parallel to the coordinate axes, having (a, b) and (a + h, b + k) as opposite vertices ($h \neq 0, k \neq 0$). Put

$$\Delta(f, Q) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$$

Then prove that there is a point (x, y) in the interior of Q such that

$$\Delta(f, Q) = h\,k\,(D_{21} f)(x, y)$$

अथवा/or

यदि दो वास्तविक घात शृंखलाओं $\sum a_n x^n$ तथा $\sum b_n x^n$ की अभिसारिता की त्रिज्या $R > 0$ है तथा $(-R, R)$ में समान फलन के लिए अभिसरित होता है, तब दोनों शृंखलाएं तद्रूप हैं।

If the two real power series $\sum a_n x^n$ and $\sum b_n x^n$ have a radius of convergence $R > 0$ and converge to the same function in $(-R, R)$, then the two series are identical.

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

खण्ड–स

Section–C

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

Long Answer Type Questions

नोट : *दीर्घ उत्तरीय प्रकार के 5 प्रश्न (9 अंक प्रत्येक) आंतरिक विकल्प सहित।* $5 \times 9 = 45$

Note : *Long answer type 5 questions of 9 marks each with Internal choice.* $5 \times 9 = 45$

7. सिद्ध कीजिए कि [a, b] पर $f \in R(\alpha)$ यदि तथा केवल यदि प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए एक विभाजन P मौजूद है इस प्रकार से कि

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon.$$

Prove that $f \in R(\alpha)$ on [a, b] if and only if for every $\epsilon > 0$ there exists a partition P such that

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon.$$

अथवा/or

मान लीजिए [a, b] पर $f \in R$; $a \leq x \leq b$ के लिए; $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ रखिए। तब सिद्ध कीजिए कि [a, b] पर F सतत है ; आगे यदि f ; [a, b] के एक बिन्दु x_0 पर सतत है, सिद्ध कीजिए कि F ; x_0 पर अवकलनीय है तथा $F'(x_0) = f(x_0)$.

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

Let $f \in R$ on [a, b]. For $a \le x \le b$, put

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Then prove that F is continuous on [a, b]; furthermore, if f is continuous at a point x_0 of [a, b], prove that F is differentiable at x_0 and http://www.onlinebu.com

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

8. यदि ψ' ; [a, b] पर सतत है, तब सिद्ध कीजिए कि ψ परिशोधनीय है, तथा $\wedge(\psi) = \int_a^b |\psi'(t)|\,dt$.

If ψ' is continuous on [a, b], then prove that ψ is rectifiable, and $\wedge(\psi) = \int_a^b |\psi'(t)|\,dt$.

अथवा/or

मान लें $\sum a_n$ वास्तविक संख्याओं की एक शृंखला हो जो अभिसरित होती है, परन्तु पूर्ण रूप से नहीं। मान लीजिए $-\infty \le \alpha \le \beta \le \infty$। तब सिद्ध कीजिए कि आंशिक योगफलों S'_n के साथ एक पुनर्व्यवस्था $\sum a'_n$ मौजूद है इस प्रकार से कि

$$\lim_{n\to\infty} \inf S'_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \sup S'_n = \beta$$

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

Let $\sum a_n$ be a series of real numbers which converges, but not absolutely. Suppose $-\infty \le \alpha \le \beta \le \infty$. Then prove that there exists a rearrangement $\sum a'_n$ with partial sums S'_n such that

$$\lim_{n\to\infty} \inf S'_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \sup S'_n = \beta$$

9. मान लीजिए $f_n \to f$ एक मीट्रिक स्थान में एक समुच्चय E पर एकरूप से है। मान लें x ; E का एक सीमा बिन्दु हो तथा मान लीजिए कि $\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ तब सिद्ध कीजिए कि $\{A_n\}$ अभिसरित होता है तथा

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Suppose $f_n \to f$ uniformly on a set E in a metric space. Let x be a limit point of E and suppose that $\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Then prove that $\{A_n\}$ converges and

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

अथवा/or

मान लें α ; [a, b] पर एकरसीय रूप से वर्धमान हो। मान लीजिए [a, b] पर $f_n \in R(\alpha)$, n = 1, 2, 3 ..... के लिए तथा मान लीजिए [a, b] पर $f_n \to f$ एक रूप से है। तब सिद्ध कीजिए कि [a, b] पर $f \in R(\alpha)$ तथा

$$\int_a^b f\, d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, d\alpha .$$

Let α be monotonically increasing on [a, b]. Suppose $f_n \in R(\alpha)$ on [a, b], for n = 1, 2, 3 ..... and suppose $f_n \to f$ uniformly on [a, b]. Then prove that $f \in R(\alpha)$ on [a, b] and

$$\int_a^b f\, d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, d\alpha .$$

10. मान लें Ω ; R^n पर सभी प्रतिलोमीय रैखिक प्रचालकों का समुच्चय हो। यदि $A \in \Omega, B \in L(R^n)$ तथा $\| B - A \| . \| A^{-1} \| < 1$, तब सिद्ध कीजिए कि $B \in \Omega$ तथा Ω एक खुला उपसमुच्चय है $L(R^n)$ का।

Let Ω be the set of all invertible Linear operators on R^n. If $A \in \Omega, B \in L(R^n)$ and $\| B - A \| . \| A^{-1} \| < 1$, then prove that $B \in \Omega$, and Ω is an open subset of $L(R^n)$.

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

अथवा/or

मान लीजिए f ; R^n में एक खुले समुच्चय $E \subset R^n$ का एक C'–प्रतिचित्रण है। $f'(a)$ कुछ $a \in E$ तथा $b = f(a)$ के लिए प्रतिलोमीय है। तब सिद्ध कीजिए कि R^n में खुले समुच्चय U तथा V मौजूद हैं इस प्रकार से कि $a \in U, b \in V$, f ; U पर एक के लिए एक है और $f(U) = V$.

Suppose f is a C'-mapping of an open set $E \subset R^n$ into R^n. $f'(a)$ is invertible for some $a \in E$ and $b = f(a)$. Then prove that there exist open sets U and V in R^n such that $a \in U, b \in V$, f is one-to-one on U and $f(U) = V$.

11. मान लें $\sum a_n x^n$ अभिसारिता की इकाई त्रिज्या सहित एक घात शृंखला हों तथा मान लें http://www.onlinebu.com

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

यदि शृंखला $\sum a_n$ अभिसरित होती है तब सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

(एबेल का प्रमेय).

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

Let $\sum a_n x^n$ be a power series with unit radius of convergence and let

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

If the series $\sum a_n$ converges, then prove that

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

(Abel's Theorem).

अथवा/or

मान लें f; R^n में एक खुले समुच्चय $E \subset R^{n+m}$ का एक C′–प्रतिचित्रण हो इस प्रकार से कि $f(a, b) = 0$ किसी बिन्दु $(a, b) \in E$ के लिए। $A = f'(a, b)$ को रखिए तथा कल्पना कीजिए कि A_x प्रतिलोमीय है, तब वहाँ $(a, b) \in U$ और $b \in W$ के साथ खुले समुच्चय $U \subset R^{n+m}$ एवं $W \subset R^m$ मौजूद हैं। सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक $y \in W$ के लिए वहाँ एक अद्वितीय x संगत है इस प्रकार से कि

$(x, y) \in U$ तथा $f(x, y) = 0$

(अंतर्निहित फलन प्रमेय)

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

http://www.onlinebu.com

Let f be a C′-mapping of an open set $E \subset R^{n+m}$ into R^n such that $f(a, b) = 0$ for some point $(a, b) \in E$. Put $A = f'(a, b)$ and assume that A_x is invertible, then there exist open sets $U \subset R^{n+m}$ and $W \subset R^m$ with $(a, b) \in U$ and $b \in W$. Prove that to every $y \in W$ there corresponds a unique x such that

$(x, y) \in U$ and $f(x, y) = 0$

(Implicit Function Theorem).

http://www.onlinebu.com

Whatsapp @ 9300930012
Your old paper & get 10/-
पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,
Paytm or Google Pay से

http://www.onlinebu.com