Roll No _____

Total No. of Questions : 11] [Total No. of Printed Pages : 8

RJ-421

M.A./M.Sc. 1st Semester (REG./PVT./ATKT) Examination, 2018

MATHEMATICS

Advanced Abstract Algebra-I

Paper-I

Time : 3 hours] [Maximum marks : 85/100

नोट : प्रत्येक खण्ड से सभी प्रश्न कीजिए।

Note : Attempt all the questions from each section.

खण्ड—अ/Section A

वस्तुनिष्ठ प्रश्न/ Objective Type Questions

नोट: वस्तुनिष्ठ प्रकार के 10 प्रश्न (1½ अंक प्रत्येक)। 10×1½=15

Note: Objective type 10 Questions of 1½ marks. 10×1½=15

1. सही उत्तर का चयन कीजिए।

Choose the correct answer.

(i) यदि एक चक्रीय समूह की यथार्थतः एक संयोजन शृंखला है, तब यह है :

(अ) अभाज्य समूह (ब) साइलो समूह

(स) परिमित समूह (द) इनमें से कोई नहीं

If a cyclic group has exactly one composition series then it is :

(a) Primary group (b) Sylow group

(c) Finite group (d) None of these

(ii) प्रत्येक परिमित समूह की :

(अ) कोई संयोजन शृंखला नहीं होती

(ब) कम से कम एक संयोजन शृंखला होती है

(स) कुछ संयोजन शृंखला होती है

(द) कोई नहीं

Every finite group has:

(a) No composition series

(b) at least one composition series

(c) Some composition series

(d) None

(iii) क्रम P^n के एक निलपोटेंट समूह के लिए, P है :

(अ) अपरिमित (ब) परिमित

(स) अभाज्य (द) संहत

For a nilpotent group of order P^n, P is:

(a) Infinite (b) Finite

(c) Prime (d) Composite

(iv) सममित समूह S_3 है :

(अ) निलपोटेंट

(ब) हल करने योग्य

(स) (अ) तथा (ब) दोनों

(द) हल करने योग्य परन्तु निलपोटेंट नहीं

Symmetric group S_3 is:

(a) Nilpotent

(b) Solvable

(c) (a) and (b) both

(d) Solvable but not nilpotent

(v) यदि E का प्रत्येक तत्व F के ऊपर बीजीय है तब E कहलाता है:

(अ) F का बीजीय विस्तार (ब) अबीजीय विस्तार

(स) प्रसामान्य विस्तार (द) इनमें से कोई नहीं

If each element of E is algebraic over F then F is called:

(a) Algebraic extension of F

(b) Transcedental extension

(c) Normal extension

(d) None of these

(vi) R के ऊपर $R^2 + 1 \in R[x]$ का विपाटन क्षेत्र, क्षेत्र है :

(अ) वास्तविक संख्याओं का

(ब) जटिल संख्याओं का

(स) परिमेय संख्याओं का

(द) इनमें से कोई नहीं

The splitting field of $R^2 + 1 \in R[x]$ over R is the field of:

(a) Real numbers (b) Complex numbers

(c) Rational number (d) None of these

(vii) बीजीय रूप से बंद क्षेत्र K के पास है :

(अ) बीजीय विस्तार

(ब) उचित बीजीय विस्तार

(स) कोई उचित बीजीय विस्तार नहीं है

(द) कोई नहीं

Algebraically closed field K posesses:

(a) Algebraic extension

(b) Proper algebraic extension

(c) No proper algebraic extension

(d) None

(viii) एक क्षेत्र F का एक विस्तार E सामान्य विस्तार कहलाता है यदि $E = F(\alpha)$ http://www.onlinebu.com

(अ) सभी $\alpha \in E$ के लिए (ब) सभी $\alpha \in F$ के लिए

(स) कुछ $\alpha \in F$ के लिए (द) कुछ $\alpha \in E$ के लिए

An extension F of a field E is called simple extension if $E = F(\alpha)$

(a) for all $\alpha \in E$ (b) for all $\alpha \in F$

(c) for some $\alpha \in F$ (d) for some $\alpha \in E$

(ix) एक बहुपद जिसका यैलोइस समूह S_n है, मूलकों द्वारा हल करने योग्य नहीं है, जब :

(अ) $n \geq 5$ (ब) $n \geq 3$

(स) $n \geq 0$ (द) $n \geq 1$

A polynomial whose yalois group is S_n, not solvable by radicals when:

(a) $n \geq 5$ (b) $n \geq 3$

(c) $n \geq 0$ (d) $n \geq 1$

(x) यदि E यैलोइस विस्तार है तब E है :

(अ) परिमित (ब) प्रसामान्य

(स) पृथक्करणीय (द) इनमें से सभी

If E is yalois extension then E is:

(a) Finite (b) Normal

(c) Separable (d) All of these

खण्ड—ब/Section B

लघु उत्तरीय प्रश्न/Short Answer Type Questions

नोटः लघुत्तरीय प्रकार के 5 प्रश्न (5 अंक प्रत्येक), आंतरिक विकल्प सहित। 5×5=25

Note: Short answer type 5 Questions of 5 marks each with Internal choice. 5×5=25

2. उदाहरण सहित प्रसामान्य श्रृंखला को परिभाषित कीजिए।

Define Normal series with example.

अथवा/or

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित समूह की एक संयोजन श्रृंखला है।

Prove that every finite group has a composition series.

3. यदि G एक हल करने योग्य समूह है तब सिद्ध कीजिए कि G का प्रत्येक उपसमूह हल करने योग्य है।

If G is a solvable group then prove that every subgroup of G is solvable.

अथवा/or

सिद्ध कीजिए कि क्रम p^n (p अभाज्य है) का एक समूह निलपोटेन्ट है।

Prove that a group of order p^n (p is prime) is nilpotent.

4. सिद्ध कीजिए कि F का प्रत्येक परिमित विस्तार E; F का बीजीय विस्तार है।

Prove that every finite extension E for F is algebraic extension of F.

अथवा/or

उदाहरण सहित विपाटन क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

Define splitting field with example.

5. यदि K बीजीय रूप से बन्द क्षेत्र है तब सिद्ध कीजिए कि $K[x]$ में प्रत्येक असामान्यनीय बहुपद कोटि एक का है।

If K is algebraically closed field then prove that every irreducible polynomial in K[x] is of degree one.

अथवा/or

सिद्ध कीजिए कि एक क्षेत्र F का अभाज्य क्षेत्र या तो Q के लिए समाकृतिक होता है अथवा Z/(p) के लिए जहाँ P अभाज्य है।

Prove that the prime field of a field F is either isomorphic to Q or to Z/(p) where p is prime.

6. स्थायी क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

Define Fixed field.

अथवा/or

यदि E एक क्षेत्र F का परिमित पृथक्करणीय विस्तार तथा $H < G(E/F)$ का एक परिमित पृथक्करणीय विस्तार है तब दिखाइए कि $G(E/E_H) = H$

If E is a finite separable extension of a field F and $H < G(E/F)$. Then show that $G(E/E_H) = H$.

खण्ड–स/Section C

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न/Short Answer Type Questions

नोटः दीर्घ उत्तरीय प्रकार के 5 प्रश्न (9 अंक प्रत्येक), आंतरिक विकल्प सहित। $5\times9 = 45$

Note: Long answer type 5 questions of 9 marks each with Internal choice. $5\times9 = 45$

7. जॉर्डन-होल्डर प्रमेय को बताइए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Jordon-Holder theorm.

अथवा/or

सिद्ध कीजिए कि एक अबेलियन समूह G की एक संयोजन शृंखला होती है यदि तथा केवल यदि G परिमित है।

Prove that an abelian group G has a composition series iff G is finite.

8. सिद्ध कीजिए कि एक परिमित समूह समाधेय है यदि तथा केवल यदि इसके संयोजन गुणन खण्ड अभाज्य क्रम के चक्रीय समूह हैं।

Prove that a finite group is solvable iff its composition factors are cyclic groups of prime order.

अथवा/or

एक निलपोटेंट समूह की प्रत्येक समरूपी छवि निलपोटेंट है।

Every homomorphic image of a Nilpotent group is nilpotent.

9. यदि E; F का एक बीजीय विस्तार है तथा $\sigma : E \to E$; F के ऊपर स्वयं में E का एक अंतःस्थापन है तब सिद्ध कीजिए कि σ; E की एक स्वाकारिकता है।

If E is an algebraic extension of F and $\sigma : E \to E$ is an embedding of E into itself over F then prove that σ is an automorphism of E.

अथवा/or

यदि F के ऊपर f(x) एक असमान्यनीय बहुपद है। तब दिखाइए कि f(x) का एक बहुविध मूल है यदि तथा केवल यदि $f'(x) = 0$

If f(x) is an irreducible polynomial over F. Then show that f(x) has a multiple root if and only if $f'(x) = 0$.

10. सिद्ध कीजिए कि एक परिमित क्षेत्र के गैर-शून्य तत्वों का गुणनात्मक समूह चक्रीय है।

Prove that the multiplicative group of non-zero elements of a finite field is cyclic. http://www.onlinebu.com

अथवा/or

यदि E एक क्षेत्र F का परिमित पृथक्करणीय विस्तार है तब दिखाइए कि E एक सामान्य विस्तार है F का।

If E is a finite separable extension of a field F then show that E is a simple extension of F.

11. बीजगणित के मौलिक सिद्धान्त को बताइए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem of algebra.

अथवा/or

दिखाइए कि बहुपद $2x^5 - 5x^4 + 5$; Q के ऊपर मूलकों द्वारा समाधेय नहीं है।

Show that the polynomial $2x^5 - 5x^4 + 5$ is not solvable by radicals over Q.