

Roll No. ....

Total No. of Questions : 11] [Total No. of Printed Pages : 10

**RH-40**

**B.Sc.-B.Ed. Examination, 2024**

**(Fourth Semester)**

**MATHEMATICS**

**Elements of Groups and Rings**

**Time : 3 Hours]**

**[Maximum Marks : 30**

खण्ड 'अ'

Section A

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(Objective Type Questions)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

1×5=5

Attempt all questions.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए :

Choose the correct answer :

(3-M24-71/35) N-RH-40

P.T.O.

(i) यदि  $H$  एक उपसमूह है समूह  $G$  का, तो गलत कथन कौनसा है ?

(अ)  $H^{-1} = H$

(ब)  $HH = H$

(स)  $H \subseteq HH$

(द)  $H^{-1} \subseteq H$

If  $H$  is a subgroup of a group  $G$ , then which is the false statement ?

(a)  $H^{-1} = H$

(b)  $HH = H$

(c)  $H \subseteq HH$

(d)  $H^{-1} \subseteq H$

(ii) प्रत्येक समूह  $G$  का प्रसामान्य उपसमूह है :

(अ)  $\{e\}$  और  $G$

(ब) केवल  $\{e\}$

(स) केवल  $G$

(द) उपर्युक्त में से कोई नहीं

Normal subgroups of every group  $G$  are :

- (a)  $\{e\}$  and  $G$
- (b) Only  $\{e\}$
- (c) Only  $G$
- (d) None of the above

(iii) यदि  $G$  समूह के  $H$  और  $K$  परिमित उपसमूह हैं, तो :

(अ)  $O(HK) = \frac{O(H)}{O(K)}$

(ब)  $O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$

(स)  $O(HK) \leq \frac{O(H \cap K)}{O(H)O(K)}$

(द)  $O(HK) \geq \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$

If  $H$  and  $K$  are finite subgroups of a group  $G$ , then :

(a)  $O(HK) = \frac{O(H)}{O(K)}$

(b)  $O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$

(c)  $O(HK) \leq \frac{O(H \cap K)}{O(H)O(K)}$

(d)  $O(HK) \geq \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$

(iv) यदि  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  और  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,

तब :

(अ)  $AB = A$

(ब)  $AB = B$

(स)  $AB = BA$

(द)  $AB \neq BA$

If  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  and  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,

then :

(a)  $AB = A$

(b)  $AB = B$

(c)  $AB = BA$

(d)  $AB \neq BA$

(v) निम्नलिखित में से कौनसा वलय एक पूर्णांकिय प्रान्त नहीं है ?

(अ)  $(\mathbb{I}, +, \cdot)$

(ब)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(स)  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

(द)  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

Which of the following rings is not an integral domain ?

(a)  $(\mathbb{I}, +, \cdot)$

(b)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(c)  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

(d)  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

खण्ड 'ब'

Section B

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

5×2=10

Attempt all questions.

(3-M24-71/37) N-RH-40

5

P.T.O.

<https://www.onlinebu.com>

2. प्रत्येक चक्रीय समूह एक आबेली समूह होता है ।

Every cyclic group is an abelian group.

अथवा (Or)

गुणन समूह  $(\{1, w, w^2\}, \cdot)$  के प्रत्येक अवयव की कोटी ज्ञात कीजिए ।

Find the orders of each element of the multiplicative group  $(\{1, w, w^2\}, \cdot)$ .

3. यदि  $H, G$  का कोई उपसमूह है और  $h \in H$ , तो  $Hh = H = hH$  ।

If  $H$  is any subgroup of  $G$  and  $h \in H$ , then  $Hh = H = hH$ .

अथवा (Or)

एक समूह  $G$  में सर्वांगसमता का सम्बन्ध  $a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$  द्वारा परिभाषित है । एक तुल्यता सम्बन्ध है ।

The relation of congruency in a group  $G$ , defined by  $a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$  is an equivalence relation.

4. समूह की समाकारिता को बताइए ।

Explain homomorphism of group.

N-RH-40

6

<https://www.onlinebu.com>

अथवा (Or)

माना  $H, G$  का एक उपसमूह है। तो दिखाइए कि .:

$$xH = Hx \quad \forall x \in G \quad \forall x^{-1} Hx \subseteq H \quad \forall x \in G.$$

Let  $H$  be a subgroup of  $G$ , then show that :

$$xH = Hx \quad \forall x \in G \quad \forall x^{-1} Hx \subseteq H \quad \forall x \in G.$$

5. सम और विषय क्रमचय को परिभाषित कीजिए।

Define the even and odd permutations.

अथवा (Or)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ क्रमचय का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।}$$

Find the inverse of the permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

6. वलय के प्रकार लिखिए।

Show that the types of Rings.

अथवा (Or)

एक वलय  $(R, +, \cdot)$  की उपवलय  $S$ , यदि और केवल यदि :

$$(i) \quad a \in S, b \in S \Rightarrow a - b \in S \quad \forall a, b \in S$$

$$(ii) \quad a \in S, b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S \quad \forall a, b \in S.$$

(3-M24-71/38) N-RH-40

-7

P.T.O.

A subring  $S$  of a ring  $(R, +, \cdot)$  iff :

$$(i) \quad a \in S, b \in S \Rightarrow a - b \in S \quad \forall a, b \in S$$

$$(ii) \quad a \in S, b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S \quad \forall a, b \in S.$$

खण्ड 'स'

Section C

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

5×3=15

Attempt all questions.

7. दिखाइए कि इकाई के चतुर्थ मूल का समुच्चय  $(1, -1, i, -i)$  गुणन के सापेक्ष एक आबेली समूह है।

Show that the set of fourth roots of unity  $(1, -1, i, -i)$  form an abelian group with respect to multiplication.

अथवा (Or)

समूह  $\{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$  के जनक ज्ञात कीजिए।

Find the generators of the group  $\{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$ .

8. उपसमूह में कोई दो वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय या तो संपार्ती है या असंयुक्त है।

Any two right (left) cosets of a subgroup are either disjoint or identical.

N-RH-40

8

अथवा (Or)

- लेग्रांजे प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए ।  
State and prove Lagrange's theorem.
9. समाकारिता के गुणों को दिखाइए ।  
Show that properties of Homomorphism.

अथवा (Or)

यदि  $N$ , समूह  $G$  का प्रसामान्य उपसमूह है, तो सहसमुच्चयों का समुच्चय  $G/N$  गुणन के अधीन समूह है ।  
If  $N$  is a normal subgroup of a group  $G$ , then  $G/N$  is a group with respect to multiplication of cosets.

10. केली प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए ।  
State and prove Cayley's theorem.

अथवा (Or)

यदि  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  और  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  तो  $AB$ ,  $BA$  और  $AB^{-1}$  ज्ञात कीजिए ।

If  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  and  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  then find  $AB$ ,  $BA$  and  $AB^{-1}$ .

11. क्षेत्र को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए ।  
Define the field with example.

अथवा (Or)

प्रत्येक परिमित पूर्णाकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है ।  
Every finite integral domain is a field.

<https://www.onlinebu.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से