

Roll No.:

[2]

Total No. of Questions : 11] [Total No. of Printed Pages : 16

PK-193

**B.Sc. (Mathematics) VI Semester
(Reg./Pvt./ATKT) Examination May 2018**

**REAL ANALYSIS DISCRETE
MATHEMATICS**

Time Allowed : Three Hours] [Maximum Marks : { Reg. - 125
Pvt. - 150

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रश्न 6 और 11 में से कोई एक भाग करना है।

Note : All questions are compulsory. Attempt only one part from question No. 6 and 11.

खण्ड - अ / Section - A

वस्तुनिष्ठ प्रश्न / Objective Type Questions

10×2=20

Q.1. सही उत्तर का चयन कीजिए।

Choose the correct answer.

i) यदि $f : [a, b] \rightarrow R$ में एक परिवर्द्ध फलन है तथा P,

$[a, b]$ का कोई विभाजन है तब:

- (अ) केवल $L(P, f)$ परिवर्द्ध है
(ब) केवल $U(p, f)$ परिवर्द्ध है
(स) दोनों $L(P, f)$ और $U(p, f)$ परिवर्द्ध है
(द) इनमें से कोई नहीं

If $f : [a, b] \rightarrow R$ is a bounded function and

P is any partition of $[a, b]$ then :

- (a) Only $L(P, f)$ is bounded
(b) Only $U(p, f)$ is bounded
(c) Both $L(p, f.)$ and $U(p, f)$ are bounded
(d) None of these

ii) यदि $f : [a, b] \rightarrow R$ में $[a, b]$ पर सतत फलन हो तो तब:

(अ) $\int_a^b f < \int_a^b f$ (ब) $\int_a^b f > \int_a^b f$

(स) $\int_a^b f = \int_a^b f$ (द) इनमें से कोई नहीं

If $f : [a, b] \rightarrow R$ is a continuous function on $[a, b]$ then :

(a) $\int_a^b f < \int_a^b f$ (b) $\int_a^b f > \int_a^b f$

(c) $\int_a^b f = \int_a^b f$ (d) None of these

iii) R के उपसमुच्चय $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ का सीमा बिंदु है-

The unit point of a subset $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ of R

is:

- (a) 1 (b) ∞
(c) 0 (d) 2

(3)

iv) किसी दूरिक समष्टि में विवृत समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ हमेशा होगा-

- (अ) संवृत समुच्चय (ब) रिक्त समुच्चय
(स) विवृत समुच्चय (द) इनमें से कोई नहीं

Every finite intersection of open sets in a metric space is always -

- (a) Closed sets (b) Empty set
(c) Open set (d) None of these

v) निम्न में से कौन सा द-मार्गन का नियम है-

Which of the following is De-Morgan's law

- (a) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
(b) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
(c) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
(d) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

vi) बूलीय बीजगणित $(B_1 + i)$ में, जहाँ $a, b \in B$, $a + a'.b$ का मान है:

In a Boolean Algebra $(B_1 + i)$ where $a, b \in B$ the value of $a + a'.b$ is

- (a) $a + a.b'$ (b) $a + a'$
(c) $a + b$ (d) $a + b'$

(4)

vii) परिपथ फलन $f(x, y, z) = xy + xy' + x'.y'$ का सरलीकृत फलन है:

- (अ) x (ब) y'
(स) $x+y'$ (द) इनमें से कोई नहीं

Simplified function for the switching function $f(x, y, z) = xy + xy' + x'.y'$ is:

- (a) x (b) y'
(c) $x+y'$ (d) None of these

viii) n चरों वाले अल्पिष्ठ बूलीय फलनों की संख्या होती है:

Number of minimal Boolean function of n variable is:

- (a) 1 (b) 2^n
(c) n^2 (d) 0

ix) संबंध $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ जो कि समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4\}$ पर परिभाषित है,

- (अ) सममित (ब) संक्रामक
(स) स्वतुल्य (द) इनमें से कोई नहीं

The relation $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ on the set $A = \{1, 2, 3, 4\}$ is :

- (a) Symmetric (b) Transitive
(c) Reflexive (d) None of these

(5)

x) xy फलन का वियोजनीय प्रसामान्य रूप है-

(अ) xyz

(ब) xyz'

(स) $xyz + xyz'$

(द) इनमें से कोई नहीं

Disjunctive normal form of function xy is :

(a) xyz

(b) xyz'

(c) $xyz + xyz'$

(d) None of these

खण्ड - ब / Section - B

लघु उत्तरीय प्रश्न / Short Answer Type Questions

5×7=35

Q2. यदि f अंतराल $[a, b]$ पर परिवद्ध फलन हो तो सिद्ध कीजिये कि

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{-b} f(x)dx$$

If f is a bounded function on $[a, b]$, then prove

$$\text{that } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{-b} f(x)dx$$

अथवा / OR

(6)

यदि $f, [a, b]$ पर परिभाषित वास्तविक मान फलन हो तथा m और M फलन $f(x)$ के अंतराल $[a, b]$ में निम्नक और उच्चक हो तो सिद्ध कीजिये कि विभाजन P के लिए:

$$m(b-a) \leq L(p, f) \leq U(p, f) \leq M(b-a)$$

If f be a real valued function defined on $[a, b]$ and m, M are the infirmary and suprenary of $f(x)$ in $[a, b]$, then prove that for any partition P :

$$m(b-a) \leq L(p, f) \leq U(p, f) \leq M(b-a)$$

Q.3. किसी दूरीक समष्टि (x, d) के लिए सिद्ध कीजिये कि

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$$

For any metric space (x, d) , prove that

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$$

अथवा / OR

दूरीक समष्टि में सातत्य एवं एकसमान सातत्य को परिभाषित कीजिये।

Define continuity and uniform continuity in metric space.

(7)

Q.4. दिखाइये कि निम्न कथन तार्किक रूप में तुल्य है:

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$$

Prove that the following statements are logically equivalent

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$$

अथवा / OR

निम्न बुलीयन सर्वसमिका को सिद्ध कीजिये।

$$(x'y + z)'(x' + z)' + (x'y + z)(x' + z) = x + y + z$$

Prove the following Boolean identity

$$(x'y + z)'(x' + z)' + (x'y + z)(x' + z) = x + y + z$$

Q.5. निम्न बुलीयन फलन को संयोजनीय प्रसामान्य रूप में बदलिए:

$$f(x, y, z) = [x + (x' + y)'] \cdot [x + (y' + z)']$$

Find the conjunctive normal form of following Boolean function :

$$f(x, y, z) = [x + (x' + y)'] \cdot [x + (y' + z)']$$

अथवा / OR

हैज डायग्राम को समझाइये।

Explain Hasse Diagram.

(8)

Q.6. अ) यदि एक ग्राफ $G = (V, E)$, $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$, $E = \{(V_1, V_2), (V_1, V_5), (V_2, V_3), (V_2, V_4), (V_3, V_4), (V_3, V_5), (V_4, V_5)\}$, $|V|=5$, $|E|=7$.

से परिभाषित है तो इस ग्राफ G का आसन्नता आव्यूह एवं आयतन आव्यूह ज्ञात कीजिये।

If a graph $G = (V, E)$ is defined by

$$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}, E = \{(V_1, V_2), (V_1, V_5), (V_2, V_3), (V_2, V_4), (V_3, V_4), (V_3, V_5), (V_4, V_5)\}, |V|=5, |E|=7.$$

a) then find the adjacency matrix and evidence matrix of the graph G .

अथवा / OR

दिखाइये कि n शीर्षों वाले किसी simple ग्राफ में कोरों की

अधिकतम संख्या $\frac{n(n-1)}{2}$ होती है।

Prove that the maximum no. of edges in a

simple graph with n vertices is $\frac{n(n-1)}{2}$.

(9)

- व) बच्चों के तीन समूहों में क्रमशः 3 लड़कियाँ और 1 लड़का, 2 लड़कियाँ और 2 लड़के, 1 लड़की और 3 लड़के हैं। प्रत्येक समूह से एक बच्चे को यादृच्छया चुना जाता है। दिखाइये कि चुने गये 3 बच्चों में एक लड़की और 2 लड़कों के होने

की प्रायिकता $\frac{13}{32}$ है।

- b) Three groups of children contain respectively 3 girls and 1 boy, 2 girls & 2 boys, 1 girl and 3 boys. Show that the chance that the three selected consist of 1 girl and 2 boys is $\frac{13}{32}$.

अथवा / OR

एक सिक्के को चार बार उछाला जाता है। माना x शीर्षों की संख्या है। $E(x)$ और $E(x^2)$ की गणना कीजिये।

In four tosses of a coin Let x be the number of heads. Calculate $E(x)$ and $E(x^2)$.

- स) सेन्ट्रल प्रोसेसिंग यूनिट का कार्य क्या है? व्याख्या कीजिये।
c) What are the various function of central processing unit? Explain.

अथवा / OR

विन्डोज ऑपरेटिंग सिस्टम को समझाइये।

Explain windows operating system.

(10)

- द) गुणात्मक हल चित्रण क्या है?
d) What is the qualitative solution sketching?

अथवा / OR

मैथेमेटिकल मॉडलिंग की सीमाओं को बताइये।

Discuss the limitations of mathematical modelling.

खण्ड - स / Section - C

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न / Long Answer Type Questions

5×14=70

- Q.7. यदि $f : [a, b] \rightarrow R$ पर एक परिवद्ध फलन है तब f , R समाकलनीय है यदि और केवल यदि $\epsilon > 0$ हेतु $[a, b]$ के एक विभाजन P का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$U(p, f) - L(p, f) < \epsilon$$

Let $f : [a, b] \rightarrow R$ is a bounded function, then f is R -integrable if and only if $\epsilon > 0$ of a partition P of $[a, b]$ such that

$$U(p, f) - L(p, f) < \epsilon$$

(11)

अथवा / OR

माना $g \in R[a, b]$ एवं f , $[a, b]$ पर परिवर्द्ध एवं एकदिष्ट फलन है तब सिद्ध कीजिये कि

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)$$

$$\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx$$

Let $g \in R[a, b]$ and f is bounded and monotonic on $[a, b]$. Then prove that

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)$$

$$\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx$$

Q.8. माना (X, d) तथा (Y, p) दूरीक समष्टियाँ हैं तथा $f : X \rightarrow Y$ एक फलन है तो f सतत है यदि और केवल यदि $f^{-1}(G)$, X में विवृत्त है जबकि G , Y में विवृत्त है।

Let (X, d) and (Y, p) be metric spaces and $f : X \rightarrow Y$ be a function. Then f is continuous if and only if $f^{-1}(G)$ is open in X whenever G is open in Y .

(12)

अथवा / OR

सिद्ध कीजिये कि किसी दूरीक समष्टि में संवृत्त समुच्चयों के खंड संग्रह का सर्वनिष्ठ एक संवृत्त समुच्चय होता है।

Prove that in a metric space arbitrary intersection of closed sets is closed.

Q.9. व्याघात से क्या समझते हैं? दिखाइयें कि निम्न कथन एक व्याघात है-

$$[(p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow [(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)]$$

What do you understand by contradiction? Show that the following statement is a contradiction:

$$[(p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow [(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)]$$

अथवा / OR

निम्न बूलीय फलन के लिए परिपथ खींचिये और उसे सरलीकृत परिपथ से प्रतिस्थापित कीजिये।

$$f(x, y, z) = x \cdot z + [y \cdot (y' + z) \cdot (x' + x \cdot z')]$$

Draw a circuit for the following Boolean function and replace it by simpler one -

$$f(x, y, z) = x \cdot z + [y \cdot (y' + z) \cdot (x' + x \cdot z')]$$

(13)

Q.10. यदि किसी समुच्चय X पर R और S दो तुल्यता संबंध हो तो सिद्ध कीजिये कि $R \cap S$ भी X पर एक तुल्यता संबंध है।

If R and S are equivalence relation on set X then show that $R \cap S$ is also on x equivalence relation.

अथवा / OR

निम्नलिखित फलन को वियोजनीय और संयोजनीय प्रसामान्य रूप में बदलिये तथा दोनों के पूरक फलन भी ज्ञात कीजिये:

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(xy + x'z)'$$

Convert the function

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(xy + x'z)'$$

into its conjunctive and disjunctive normal form. Also write the complement of both form, thus obtained.

Q.11. अ) निम्नलिखित को परिभाषित कीजिये:

- | | |
|---------------|------------------|
| i) उपआलेख | ii) बहुआलेख |
| iii) जनकवृक्ष | iv) द्विचर वृक्ष |

a) Define the following:

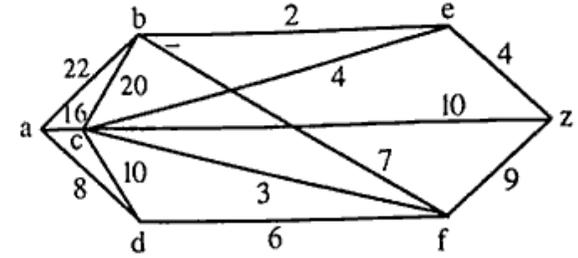
- | | |
|--------------------|-----------------|
| i) Subgraph | ii) Multigraph |
| iii) Spanning tree | iv) Binary tree |

अथवा / OR

(14)

a और z के मध्य लघुत्तम पथ ज्ञात कीजिये-

Find the shortest path between a and z.



- ब) यदि शतरंज के बोर्ड से 4 वर्गों को यादृच्छया चुना जाता है तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि वे एक ही विकर्ण रेखा में होंगे।
- b) If four squares are choosen at random on a chess board, find the chance that they should be in a diagonal line.

अथवा / OR

दिखाइये कि द्विपद बंटन के आघूर्ण

$$\mu_{r+1} = pq \left(nr\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{d_p} \right)$$

(15)

द्वारा दिये जाते हैं जहाँ μ_r , माध्य के सापेक्ष r वां आघूर्ण है।

Prove that moments of binomial distribution are given by

$$\mu_{r+1} = pq \left(nr\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{d_p} \right)$$

Where μ_r is the r^{th} moment about the mean.

- स) पेरिफेरल डिवाइसिस क्या है? कम्प्यूटर में इसका क्या महत्त्व है?
- c) What are the peripheral devices? What are its importance in computer.

अथवा / OR

Storage हेतु विभिन्न coding information क्या है? समझाइये।

What are the various coding information of storage? Explain.

- द) पॉपुलेशन ग्रोथ मोडलस के लॉजिस्टिक नियम को विस्तार से समझाइए।
- d) Discuss the logistic law of population growth models in detail.

(16)

अथवा / OR

प्रथम कोटि के अवकल समीकरण की स्थापना कैसे करते हैं? उदाहरण देकर समझाइये।

How we set the first order differential equation? Explain with examples.

