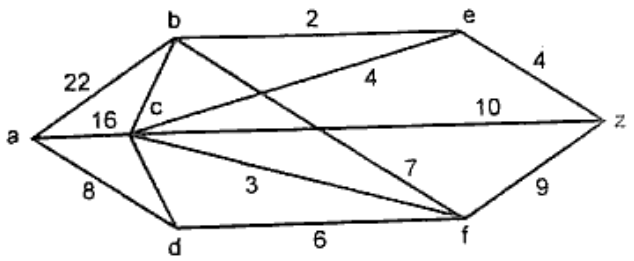
Q.11. यदि R तथा S समुच्चय X में तुल्यता संबंध हो तो सिद्ध कीजिए कि $R \cap S$ भी X में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

If R and S are two equivalence relations in a set X; then prove that $R \cap S$ is also an equivalence relation in X.

अथवा / OR

निम्नलिखित भारित आलेख में a से z के बीच न्यूनतम पथ ज्ञात कीजिए।

Find the shortest path for the following weighted graph.



SH - 168

B.SC. V Semester (New) Exam.-2015

MATHEMATICS-REAL ANALYSIS LINEAR ALGEBRA AND DISCRETE MATHEMATICS

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 125 *Minimum Marks : 42*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य है।

Note : Attempt all questions.

खण्ड – 'अ' / Section - A

वस्तुनिष्ठ प्रश्न / Objective Type Questions

10×2=20

Q.1. सही उत्तर का चयन कीजिये।

Choose the correct answer.

i) यदि $f(x) = x,\ x \in [0, 1]$ तथा $p = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, [0, 1] का विभाजन है तो L(p, f) का मान होगा :

If $f(x) = x,\ x \in [0, 1]$ and $p = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ is the partion of [0, 1] then the value of L(p, f) will be

(a) 1 (b) 0

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

ii) यदि $f(x) = c\ \forall x \in [a, b]$ तब $\int_a^b f(x)dx$ का मान होगा :

If $f(x) = c\ \forall x \in [a, b]$ then $\int_a^b f(x)dx$ will be

(a) c (b) 0

(c) c(b−a) (d) c(a−b)

iii) यदि f_x और f_y दोनों ही D के एक बिन्दु (a, b) पर अवकलनीय है जहाँ $D \subseteq R^2$ और f(x, y) में परिभाषित हो तब $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ यह कथन है :

(अ) स्वार्ज का प्रमेय (ब) यंग का प्रमेय

(स) लीब्निट्ज का प्रमेय (द) कौशी प्रमेय

If f_x and f_y both are differentiable at a point (a, b) in region D, where $D \subseteq R^2$ and f(x, y) is defined in D then $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$. This statement is

(a) Schwarz's theorem

(b) Young's theorem

(c) Leibnitz theorem

(d) Cauchy's theorem

iv) यदि $f(x,y)=2x^2 - xy + 2y^2$ तब $f_y(1,2)$ का मान होगा

If $f(x,y)=2x^2 - xy + 2y^2$ then the value of $f_y(1,2)$ will be

(a) 3 (b) 0

(c) 2 (d) 1

v) यदि Q, R, C क्रमशः परिमेय, वास्तविक तथा सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र हो तो निम्न में से कौन सी बीजीय संरचना सदिश समष्टि नहीं है।

If Q, R, C are the field of rational, real and complex numbers respectively then which of the following algebraic structure is not a vector space.

(a) Q(R) (b) R(R)

(c) R(Q) (d) C(C)

vi) एक परिमित सदिश समष्टि V(F) के प्रत्येक उपसमष्टि W के लिए निम्न से कौन-सा सम्बन्ध सत्य है।

For each subspace W of a finite dimensional vector space V(F) which of the following statement is true

(a) dim W > dim V

(b) dim W ≥ dim V

(c) dim W ≤ dim V

(d) None of the above

vii) यदि $T: U \to V$ एक रैखिक रूपान्तरण है $\alpha, \beta \in U$ तथा $a, b \in F$ तब

(अ) $T(a\alpha + b\beta) > a\,T(\alpha) + bT(\beta)$

(ब) $T(a\alpha + b\beta) = a\,T(\alpha) - bT(\beta)$

(स) $T(a\alpha + b\beta) = aT(\alpha) + bT(\beta)$

(द) इनमें से कोई नहीं

If $T: U \to V$ be a linear transformation, $\alpha, \beta \in U$ and $a, b \in F$, then

(a) $T(a\alpha + b\beta) > a\,T(\alpha) + bT(\beta)$

(b) $T(a\alpha + b\beta) = a\,T(\alpha) - bT(\beta)$

(c) $T(a\alpha + b\beta) = aT(\alpha) + bT(\beta)$

(d) None of the above

viii) यदि T परिमित्र विमीय सदिश समष्टि U(F) से सदिश समष्टि V(F) में एक रैखिक रूपान्तरण है, तब T के परास को कहते है।

(अ) T की शून्यता

(ब) V की विमा

(स) U की विमा

(द) T की कोटि

If T is a linear transformation from finite dimensional vector space U(F) to V(F), then the range of T is called

(a) Nullity of T (b) dim of V

(c) dim of U (d) Rank of T

ix) यदि A={1, 3, 5} और R={(1, 3), (1, 5), (3, 5)} तब सम्बन्ध R है।

(अ) स्वतुल्य (ब) सममिति

(स) संक्रामक (द) सममिति एवं संक्रामक

If A={1, 3, 5} and R={(1, 3), (1, 5), (3, 5)} then the relation R is

(a) Reflexive

(b) Symmetric

(c) Transitive

(d) Symmetric and transitive

x) किसी ग्राफ में विषम कोटि के शीर्षों की संख्या होती है

(अ) विषम (ब) अभाज्य

(स) सम (द) इनमें से कोई नहीं

The number of vertices of odd degree in a graph is

(a) Odd (b) Prime

(c) Even (d) None of the above

खण्ड – 'ब'/ Section - B

लघु उत्तरीय प्रश्न / Short Answer Type Questions

5×7=35

Q.2. निम्न रीमान योग, उपरि रीमान योग एवं रीमान समाकलन को परिभाषित कीजिए।

Define Lower Riemann sums, upper Riemann sums and Riemann integral.

अथवा / OR

यदि $f(x,y)=2x^2 - xy + 2y^2$ तो परिभाषा से $f_x(1, 2)$ और $f_y(1, 2)$ का मान ज्ञात करो।

If $f(x,y)=2x^2 - xy + 2y^2$ then find $f_x(1, 2)$ and $f_y(1, 2)$ by definition.

onlineBU.com

Q.3. अन्तराल $0<x<2\pi$ में फलन $f(x) = x$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find the Fourier series for the function $f(x) = x$ in the interval $0<x<2\pi$.

अथवा / OR

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ की अभिसारिता की जाँच कीजिए।

Examine the convergence of $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Q.4. सिद्ध करो कि दो उपसमष्टियों का सर्वनिष्ठ एक उपसमष्टि होती है।

Prove that the intersection of two subspace of a vector space is also a subspace. onlineBU.com

अथवा / OR

सदिश $\{(2, 3, -1), (-1, 4, -2), (1, 18, -4)\}$ के रैखिकत: स्वतन्त्र या परतन्त्र होने की जाँच $V_3(R)$ में कीजिए।

Examine whether the vectors $\{(2, 3, -1), (-1, 4, -2), (1, 18, -4)\}$ are linear by dependent or linearly independent.

Q.5. सिद्ध कीजिए कि रूपान्तरण $T: V_2(R) \to V_3(R)$ जो $T(\alpha, \beta) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta, \beta)\ \forall (\alpha, \beta) \in V_2(R)$ से परिभाषित है, एक रैखिक रूपान्तरण है।

Prove that the transformation $T: V_2(R) \to V_3(R)$ defined by $T(\alpha, \beta) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta, \beta)\ \forall (\alpha, \beta) \in V_2(R)$ is a linear transformation.

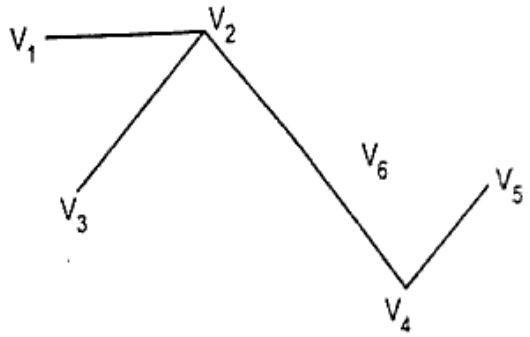
Q.6. तुल्यता संबन्ध एवं आंशिक क्रम संबन्ध को परिभाषित कीजिए।

Define equivalence relation and partial order relation.

अथवा / OR

निम्न आलेख के प्रत्येक शीर्ष की घात लिखिए।

Write the degree of each vertex of the following graph.



खण्ड – 'स' / Section - 'C'

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न / Long Answer Type Questions

5×14=70

Q.7. यदि P, [a, b] का एक विभाजन है तथा f अन्तराल [a, b] पर परिभाषित वास्तविक मान फलन है, m तथा M इसके निम्न तथा उपरि परिबन्ध है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a)$$

If P is a partion of [a, b] and f is a real valued function defined on [a, b] and m and M are g.l.b. and l.u.b. of its, then prove that

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a)$$

अथवा / OR

मान लो $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ फलन f(x,y) की बिन्दु (0,0) पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

Let $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Examine the differentiability of f(x,y) at (0,0)

Q.8. समाकलन $\int_a^\infty \frac{\cos mx}{a^2+x^2}dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Examine the convergence of the integral $\int_a^\infty \frac{\cos mx}{a^2+x^2}dx$

Q.9. यदि V(F) एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है। तब V(F) के किन्हीं दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है। सिद्ध कीजिए।

If V(F) is a finite dimensional vector space then prove that any two bases of V(F) have the same number of elements.

अथवा / OR

यदि V(F) एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है। तब सिद्ध कीजिए कि V का प्रत्येक रैखिकतः स्वतन्त्र एवं समुच्चय या तो V का आधार होगा अथवा V के आधार में विस्तारित किया जा सकेगा। (विस्तार प्रमेय)

If V(F) is a finite dimensional vector space then prove that every linearly independent subset of V(F) will be the basis for V or can be extended to form the basis of V. (Extension theorem)

Q.10. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ के आइगन मानों एवं संगत आइगन सदिशों को ज्ञात कीजिए।

Find the eigen values and corresponding eigen vectors for the matrix

$$A=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

अथवा / OR

यदि U तथा V क्षेत्र F पर सदिश समष्टियाँ हैं और T एक रैखिक रूपान्तरण है माना U परिमित विमीय समष्टि है तब सिद्ध करो कि जाति (T) + शून्यता (T) = वीमा (U).

If U and V are vector space over the field F and let T is a linear for transformation from U into V. Suppose U is finite dimensional. Then prove that rank (T) + nullity (T) = dim(U).