

Q.11. वलयों के समाकारिता पर मूलभूत प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिये।

State and prove the fundamental theorem on Homomorphism of Rings.

अथवा / OR

सिद्ध कीजिये, किसी समूह G का केन्द्र $Z(G)$, G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है। onlineBU.com

Prove that, center $Z(G)$ of group G is a normal subgroup of G .



B.Sc. IV Semester (Mathematics) Exam. 2015
ADVANCE CALCULUS PARTIAL DIFF. EQUATION
COMPLEX AND ANALYSIS

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 125

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : Attempt all questions.

खण्ड - 'अ' / Section - A

2½ each

वस्तुनिष्ठ प्रश्न / Objective Type Questions

Q.1. सही उत्तर का चयन कीजिये

Choose the correct answer.

i) यदि $u = x^3 + y^3 - 3axy^2$ तब $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ का मान होगा-

If $u = x^3 + y^3 - 3axy^2$ then $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} =$

(a) $2u$

(b) u

(c) $3u$

(d) 0

- ii) यदि $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ तब
If $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ then

$\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}$ का मान होगा

Value of $\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}$ is

- (a) $\cos \phi$ (b) $\sin \phi$
(c) $\cos \phi \sin \phi$ (d) $-\cos \phi \sin \phi$

- iii) किसी बिन्दु (a, b) को फलन $f(x, y)$ का पल्याण बिन्दु होने के लिये प्रतिबंध है-

Condition for a point (a, b) to be a saddle point for function $f(x, y)$ is

- (a) $r + -s^2 = 0$
(b) $rt - s^2 < 0$
(c) $rt - s^2 > 0$
(d) $r = s = t = 0$

- iv) द्विगुणन सूत्र-

Duplication formula

$$(a) \Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m)$$

$$(b) B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, (m, n > 0)$$

$$(c) B(m, n) = B(n, m)$$

$$(d) \Gamma(n+1) = n \Gamma(n), n > 0$$

onlineBU.com

- v) प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण का द्वितीय मानक रूप होता है-

$$(a) f(x, y, p) = 0$$

onlineBU.com

$$(b) f(z, p, q) = 0$$

$$(c) f(p, q) = 0$$

(d) इनमें से कोई नहीं

Second standard form of partial differential equation of first order

$$(a) f(x, y, p) = 0$$

$$(b) f(z, p, q) = 0$$

onlineBU.com

$$(c) f(p, q) = 0$$

(d) None of these

- vi) $(D^2 - 5DD' + 6D'^2)z = e^{x+y}$ का विशिष्ट समाकल होगा-

Particular Integral of $(D^2 - 5DD' + 6D'^2)z = e^{x+y}$

$$(a) 0$$

$$(b) e^{xy}$$

$$(c) \frac{1}{2} e^{x+y}$$

$$(d) e^{x+2y}$$

- vii) $w = \frac{z}{z-2}$ के नियत बिन्दु है

onlineBU.com

$$(a) 0, 2$$

$$(b) 0, 3$$

$$(c) 1, 2$$

(d) इनमें से कोई नहीं

(4)

onlineBU.com

Fixed points for $w = \frac{z}{z-2}$

- (a) 0, 2 (b) 0, 3
(c) 1, 2 (d) None of these

viii) सम्मिश्र संख्या "i" का कोणांक

Argument of complex number "i".

- (a) 2π (b) π
(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

ix) यदि G एक परिमित समूह है और $O(G) = p^2$ जहाँ p एक अभाज्य संख्या है। तब समूह G है -

- (अ) प्रसामान्य (ब) आबेली
(स) अनआबेली (द) संयुग्मी

If G is a finite group and $O(G) = p^2$ where p is a prime number, then group G

- (a) Normal (b) Abelian
(c) Non-abelian (d) Conjugate

x) पूर्णाकीय प्रांत में कम से कम अवयव होना आवश्यक है

At least number of elements contains in a integral domain

- (a) 2 (b) 3
(c) 1 (d) 4

(5)

खण्ड - 'ब' / Section - B

लघु उत्तरीय प्रश्न / Short Answer Type Questions

नोट: सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

Note: Attempt all five questions.

8 each

Q.2. यदि $\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1$

तो सिद्ध कीजिये।

onlineBU.com

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 2(xu_x + yu_y + zu_z)$$

$$\text{If } \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1$$

Then prove that,

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 2(xu_x + yu_y + zu_z)$$

अथवा / OR

फलन $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ का $(x-2)$ और $(y-3)$ की घातों में टेलर प्रसार कीजिये।Expand $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ in terms of $(x-2)$ and $(y-3)$ by Taylor's expansion theorem.

Q.3. उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ की विवेचना कीजिये।

Describe the maxima or minima of following

$$u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

onlineBU.com

(6)

onlineBU.com

अथवा / OR

मुल्यांकन कीजिये।

Evaluate

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a (yz + zx + xy) dx dy dz$$

Q.4. हल करें

Solve

$$(mz - ny)p + (nx - lz)q = ly - mx$$

अथवा / OR

चारपिट विधि से हल करो-

Solve by Charpit's method

$$2xz - px^2 - 2qxy + pq = 0$$

Q.5. सिद्ध कीजिये कि दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का मापांक सदैव उनके मापांकों के योग से छोटा या बराबर होता है।

Prove that modulus of sum of two complex numbers is less or equal to sum of their modulus.

अथवा / OR

सिद्ध करो कि निम्न फलन लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है तथा संगत वैश्लेषिक फलन $(u + iv)$ ज्ञात कीजिये।

Prove that following function satisfies Laplace's equation. Determine corresponding analytic function $(u + iv)$.

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

(7)

Q.6. मानलो G एक अन-आबेली समूह है। दर्शाईये कि प्रतिचित्रण

$f: G \rightarrow G$ जो निम्न है-

$$f(x) = x^{-1}, \forall x \in G$$

एक स्वाकारिता नहीं है।

Let G is a non abelian group. A mapping $f: G \rightarrow G$ defined as follows:

$$f(x) = x^{-1}, \forall x \in G$$

Show that f is not an automorphism.

अथवा / OR

“एक क्रम विनिमेय वलय का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिंब एक क्रमविनिमेय वलय होता है।” सिद्ध कीजिये।

Prove that “Each homomorphic image of a commutative ring is commutative”.

खण्ड - 'स' / Section - C

12 each

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न / Long Answer Type Questions

Q.7. सिद्ध कीजिये कि

onlineBU.com

$$\sin x \sin y = xy - \frac{1}{6} \left\{ (x^3 + 3xy^2) \cos \theta x \sin \theta y \right.$$

$$\left. + (y^3 + 3x^2y) \sin \theta x \cos \theta y \right\};$$

जहाँ $0 < \theta < 1$

Show that

$$\sin x \sin y = xy - \frac{1}{6} \left\{ (x^3 + 3xy^2) \cos \theta x \sin \theta y \right.$$

$$\left. + (y^3 + 3x^2y) \sin \theta x \cos \theta y \right\};$$

If $0 < \theta < 1$

(8)

अथवा / OR

यदि If

$$u = \frac{x}{\sqrt{1-r^2}}, v = \frac{y}{\sqrt{1-r^2}}, w = \frac{z}{\sqrt{1-r^2}}$$

जहाँ Where

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

तो दर्शाईये कि then show that

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = (1-r^2)^{-\frac{5}{2}}$$

- Q.8. x, y, z के मान ज्ञात कीजिये, जिसके लिये $f(x, y, z) = \frac{5xyz}{x+2y+4z}$ प्रतिबंध $xyz=8$ के लिये एक उच्च मान रखता है।

Determine x, y, z for $f(x, y, z) = \frac{5xyz}{x+2y+4z}$ which has maxima for condition $xyz=8$. onlineBC.com

अथवा / OR

द्विगुणन सूत्र का कथन लिखकर सिद्ध कीजिये।

State and prove Duplication Formula.

(9)

- Q.9. समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ का वर्गीकरण कीजिये एवं विहित रूप में रूपान्तरित कीजिये।

Classify the equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ and convert it into canonical form.

अथवा / OR

हल कीजिये।

onlineBC.com

Solve

$$(D^2 - D')(D - 2D')z = e^{2x+y} + xy$$

- Q.10. वैश्लेषिक फलन के लिये कॉशी रीमान समीकरण प्राप्त कीजिये।
Determine Cauchy Riemann equations for analytic function.

अथवा / OR

उस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिये, जो वृत्त $|z| = 1$ के बाह्य भाग को अर्ध समतल $R(w) \geq 0$ में इस प्रकार रूपान्तरित करता है कि बिन्दु $z = 1, -i-1$ के संगत बिन्दु क्रमशः $w = i, 0, -i$ है।

Determine the transformation which transform external part of circle $|z| = 1$ in semi plane $R(w) \geq 0$ such that corresponding points for points $z = 1, -i-1$ are $w = i, 0, -i$ respectively.