

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages 10

AV-347

B.Sc. IIIrd Year (Reg./Pvt.)

Main Examination, 2022

Mathematics

Paper - II

Real Complex Analysis

Time : 3 Hours

Maximum Marks : Reg. 40

Pvt. 50

नोट :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये -

Note :- Attempt all questions.

खण्ड - 'A'

SECTION - 'A'

AV-347

(1)

P.T.O.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

Objective Type Questions

1. सही उत्तर का चयन कीजिए :

Choose the correct answer:

(i) The Cauchy - Riemann equations for $f(z) = u + iv$ are

(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ and $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(c) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ and $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(d) None of these

फलन $f(z) = u + iv$ के लिए कौशी-रीमान समीकरण है -

(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ and $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(c) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ and $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(d) इनमें से कोई नहीं

AV-347

(2)

(ii) Every uniform continuous functions is :

- (a) Continuous
- (b) Discontinuous
- (c) Bounded
- (d) None of these

प्रत्येक एक समान संतत फलन होता है -

- (a) संतत
- (b) असंतत
- (c) परिवद्ध
- (d) इनमें से कोई नहीं

(iii) Every cauchry sequences in a metric space is :

- (a) Convergent
- (b) Divergent
- (c) Bounded
- (d) None of these

दूरिक समष्टि में प्रत्येक कौशी अनुक्रम होती है -

- (a) अभिसारी
- (b) अपसारी
- (c) परिवद्ध
- (d) इनमें से कोई नहीं

(iv) If $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2$, then value of $f_x(1, 2)$ will be -

- (a) 0
- (b) -1
- (c) 1
- (d) 2

फलन $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2$ के लिए $f_x(1, 2)$ का मान होगा -

- (a) 0
- (b) -1
- (c) 1
- (d) 2

(v) If $f(x,y)$ is differentiable at $(0,0)$ then :

- (a) $f_x(a,b) = f_y(a,b)$
- (b) Only $f_{xy}(a,b)$ exist
- (c) Only $f_{yx}(a,b)$ exist
- (d) None of these

फलन $f(x,y)$ बिंदु $(0,0)$ पर अवकलनीय है यदि -

- (a) $f_x(a,b) = f_y(a,b)$
- (b) सिर्फ $f_{xy}(a,b)$ का अस्तित्व है

- (c) सिफ्ट $f_{yx}(a,b)$ अस्तित्व है
 (d) इनमें से कोई नहीं
 आण्ड - 'ब'

SECTION - 'B'

लघु उत्तरीय प्रश्न

5/2=10

Short Answer Type Questions

2. Define upper and lower Riemann integral.

उपरि तथा निम्न रीमान योग की परिभाषा दीजिये।

अथवा/OR

Define Analytic function and write cauchy reimann condition for a function $f(z)$ to be analytic.

विश्लेषित फलन की परिभाषा दीजिए तथा फलन $f(z)$ के विश्लेषित होने के लिए कौशी-रीमान समीकरण लिखें।

3. Prove that between any two different real numbers, there lies at least one rational number.

सिद्ध कीजिए कि किसी दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के बीच कम से कम एक परिमेय संख्या होती है।

अथवा/OR

Find modulus and argument of the following number $\frac{1-i}{1+i}$

AV-347

(5)

PTO

सम्पूर्ण संख्या $\frac{1-i}{1+i}$ का मापांक एवं वितरक ज्ञान कीजिए।

4. Test the convergence of the integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

समाकलन $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिये।

अथवा/OR

Test the continuity of the function

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ at the point } (0,0).$$

$$\text{फलन } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ की संतता का परीक्षण}$$

बिंदु $(0,0)$ पर कीजिए।

5. Define metric space with an example.

दूरीक समष्टि को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

AV-347

(6)

अथवा/OR

Prove that real and imaginary part of an analytic function satisfies laplace equation.

सिद्ध कीजिए कि एक विश्लेषित फलन के वास्तविक एवं अधिकलिपन भाग लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करने हैं।

Construct the analytic functions $f(z) = u+iv$, where $u=y^3 - 3x^2y$.

विश्लेषित फलन $f(z) = u+iv$, का निर्धारण कीजिये जहाँ कि $u=y^3 - 3x^2y$ है।

अथवा/OR

If $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, compute partial derivation $f_x(0,0)$ and $f_y(0,0)$.

यदि फलन $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ है, तो अंशिक अवकलन $f_x(0,0)$ एवं $f_y(0,0)$ ज्ञात कीजिए।

खण्ड - 'स'

SECTION - 'C'

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

$5 \times 5 = 25$

Long Answer Type Questions

$$7. \text{ Let } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Show that $f(x,y)$ is continuous but not differentiable at $(0,0)$
सिद्ध कीजिए कि $f(x,y)$ फलन

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{यदि } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

बिंदु $(0,0)$ पर संतत है, किंतु अवकलनीय नहीं है।

अथवा/OR

If $f \in R[a, b]$ and let F be a differentiable function on $[a, b]$, such that $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$, then prove that

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

मान लो $f \in R[a, b]$ तथा $F[a, b]$ पर एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $F'(x) = f(x) \forall x \in R[a, b]$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

8. Prove that the function $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ satisfies Laplace's equation and determine corresponding quality function $u + iv$.

सिद्ध कीजिए कि फलन $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ लाप्लास समीकरण को संतुक्त करना है। संगत विश्लेषित फलन ज्ञात कीजिए, जिसका यह वास्तविक भाग है।

अथवा/OR

prove that every convergent sequence in a metric space is a cauchy sequence.

सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम कौशी अनुक्रम होना है।

9. Find the fourier series of the function $f(x) = x^2$, in the interval $(-z, z)$.

फलन $f(x) = x^2$ के लिए अंतराल $(-z, z)$ में फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिये।

अथवा/OR

Define periodic function and write Dirichlet's condition required for a function to express in fourier series.

सामयिक फलन को परिभाषित कीजिये एवं किसी फलन को फूरियर श्रेणी में दर्शान के लिए आवश्यक डिरिख्ले अवधारणा को लिखें।

10. Test the convergence of integral $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

समाकलन $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

अथवा/OR

Prove that if $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is bounded then for any partition p of $[a, b]$, $L(p, f)$ and $U(p, f)$ are bounded.

मान लो $f \in R[a, b]$ परिबद्ध फलन है तो अंतराल $[a, b]$ के विभाजन p के लिए $L(p, f)$ एवं $U(p, f)$ भी परिबंध होंगे।

11. Prove that for any real number x , there exist a unique integer n such that $x - 1 \leq n < x$

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए एक ऐसे अद्वितीय पूर्णांक n का अस्तित्व है कि $x - 1 \leq n < x$

अथवा/OR

State and prove Cauchy's Residue theorem.

कौशी का अविशेष प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

